다차원 공간 제한 기법(MLP)의 CPR 기법으로 확장 적용에 관한 연구

Extension of Multi-dimensional Limiting Process for Correction Procedure via Reconstruction on Unstructured Grids

박진석[1]*, 김종암[1]
서울대학교[1]

초 록

본 연구에서는 다차원 공간 제한 기법(MLP)을 고차 정확도 수치 기법인 CPR(Correction Procedure via Reconstruction)에 적용하고자 한다. 그동안 본 연구 그룹에서는 유한 체적법을 바탕으로 다차원 물리 유동 특성을 반영한 다차원 공간 제한 기법을 성공적으로 개발하였으며, 최근 이를 고차 정확도 기법 중 하나인 불연속 갤러킨 기법으로 확장되었다. 이 기법은 기존의 유한 체적법에서 제안한 MLP 기울기 제한자와 더불어서, 고차 내삽 기법에 적합한 MLP 기반 troubled-cell 표식자를 결합한 결과로, 충격파 주위에서 안정성을 유지하면서 정밀하게 유동을 해석할 수 있었다. 이에 본 연구에서는 MLP 기법을 node 기반의 CPR 기법으로 확장 적용하고자 한다. MLP 와 결합한 CPR 기법은 연속적인 구간에서 높은 정확도를 유지하면서도 매우 강건하고 정확하게 물리적 비선형파를 포착함을 확인할 수 있었다.

ABSTRACT

The present paper deals with the extension of multi-dimensional limiting process onto correction procedure on unstructured grids. MLP, which have been originally developed in finite volume method (FVM), provide an accurate, robust and efficient oscillation-control mechanism in multiple dimensions for linear reconstruction. This limiting philosophy can be extended into higher-order reconstruction. The proposed algorithm, called the hierarchical MLP, facilitates the accurate capturing of detailed flow structures in both continuous and discontinuous regions. This algorithm has been developed in modal DG framework, but it is also adapted to CPR framework which is nodal formulation. Extensive numerical analyses and computations demonstrate that the proposed limiting approach yields the desired accuracy and outstanding performances in resolving compressible inviscid and viscous flow features.

Key Words : Multi-dimensional Limiting Process(다차원 공간 제한 기법), 고차 정확도 기법(Higher-order CFD Method), Correction Procedure via Reconstruction(CPR 기법)

1. 서 론

압축성 유동을 해석하기 위해서 유한체적법을 근간으로 충격파 포착 기법을 활용한 2 차 정확도 공간 차분 기법이 널리 사용된다. 이러한 유동 해석 프로그램일 활용하여 고속 비행체의 공력 특성을 분석하고 나아가 공력 최적 설계를 수행하기도 한다. 그러나 이들 수치 기법이 갖는 과도한 수치 점성으로 인하여 와류가 지배적이거나 비정상성이 큰 유동을 해석하는 경우, 신뢰할 만한 결과를 얻는데 한계가 있다. 이러한 점을 극복하기위해 최근 고차 정확도 수치 기법 연구가 크게 각광을 받고 있다.

대표적인 고차 정확도 수치 기법으로 불연속 갤러킨기법(DG)이 있는데, 이 기법은 복잡한 형상에 쉽게 적용할 수 있고, 고차 내삽시 좁은 인접 격자 정보만을 이용한다는 장점이 있다. 그러나 기존의 유한체적법에 비해 이론이 복잡하고 계산량이 많다는 단점이 있다. 이러한 DG 기법의 효율성을 향상시키기위해 스펙트럴 볼륨(SV), 스펙트럴 차분(SD) 기법들이 제안되기도 하였다. 최근 전술한 고차 정확도 수치 기법을 통합한 Correction Procedure via Reconstruction(CPR) 기법[1,2]이 개발되었는데, DG 등의 고차 정확도 기법이 갖는 장점을 가지면서도 수식적으로 간단하여 효율적인

계산 가능하다는 장점이 있다.

이러한 고차 정확도 수치 기법을 압축성 유동 해석에 적용하려고 하고 있으나, 몇가지 해결해야 할 문제가 있다. 그중 가장 어려운 문제중 하나는 불연속 구간에서 불필요한 수치 진동을 억제할 수 있는 공간 제한 메커니즘이 불안정하다는 점이다.

그동안 본 연구 그룹에서는 다차원 유동 특성을 고려한 다차원 공간 제한 기법을 유한 체적법에 대해서 개발하였다.(3-5) 최근 이 기법은 DG Framework 되었으며, 고차 수치 기법이 갖는 정확도를 유지하면서도 충격파 주위에서 수치 안정성을 크게 향상시킬 수 있었다.(6) 이에 본 연구에서는 MLP 제한 기법을 CPR Framework 으로 확장하고자 한다.

2. Correction Procedure via Reconstruction

쌍곡 편미분 방정식에 대해 CPR Framework 을 적용하기 위해 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{T_j}\left[\frac{\partial \mathbf{Q}_j^h}{dt}+\nabla_h\cdot\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_j^h\right)+\delta_j\right]\mathbf{W}dV=0, \quad (1)$$

여기서, $\mathbf{Q}_j^h$ 는 격자 T_j 에서 근사화된 보존형 물성치 벡터이고 $\mathbf{F}$ 는 Flux 이다. δ_j 는 lifting operator 에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$\delta_j=\int_{\partial T_j}\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{Q}_{jk}^h,\mathbf{Q}_{kj}^h\right)-\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_{jk}^h\right)\right)\cdot\mathbf{nW}dS\ , \quad (2)$$

여기서 $\mathbf{Q}_{jk}^h$ 는 격자 T_j 에서 주변 격자 T_k 방향으로의 경계면에서의 물성치이고 $\mathbf{H}\left(\mathbf{Q}_L,\mathbf{Q}_R\right)$ 은 수치 flux 함수 벡터이다. 식 (2)를 n 차 다항식으로 구성된 함수 공간 V^n 에 투영시킬경우 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_j^h}{\partial t}+\Pi\left(\nabla_h\cdot\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_j^h\right)\right)+\delta_j=0. \quad (3)$$

CPR 기법에서는 solution point 를 이용하여 각 격자에서 고차 내삽 함수를 구성한다.

$$\mathbf{Q}_j^h(x)=\sum_i \mathbf{Q}_{i,j}^h L_i(\mathbf{x})\ , \quad (4)$$

여기서 $L_i(\mathbf{x})$ 는 라그랑지 다항함수이고, $\mathbf{Q}_{i,j}^h$ 는 solution point $\mathbf{x}_i$ 에서 물성치 벡터이다. 각 solution point 에서는 식 (3)을 만족시켜 최종 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{i,j}^h}{\partial t}+\Pi\left(\nabla_h\cdot\mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_{i,j}^h\right)\right)+\delta_{i,j}=0. \quad (5)$$

구체적인 구현 과정은 참고문헌 [2]에 설명되어 있다. 식 (5)에서 비선형 flux 를 V^n 에 투영시킬 때 Lagrange 다항식을 이용하는 LP 방법과 Chain Rule 을 이용한 CR 방법이 있다. CR 방법은 Aliasing 오차에 의한 정확도 저하는 없으나 보존성을 만족하지 못한다는 문제가 있었다. 그러나 최근 이를 해결한 conservative CPR 기법이 제안되었으며,(7) 본 연구에서는 이를 근간으로 유동 해석을 수행하였다.

3. CPR 방법을 위한 MLP 제한 기법

3.1 다차원 공간 제한 기준

다차원 공간에서 단조성을 보장하기 위해서, MLP 기법에서는 1 차원 단조 조건을 확장한 다차원 공간 제한 기준을 제안하였다. 이 기법의 핵심적인 내용은 격자내 평균값 뿐 아니라 각 꼭지점에서의 물성치 역시 공간 제한이 필요하다는 점이다. 특히 꼭지점에서의 재생성된 분포가 주변 물성치 내에서 제한될 경우 물성치 평균값 역시 단조성을 보장할 것이라는 가정을 전제로 하고 있다. 이러한 MLP 조건은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\overline{q}_{neighbor}^{\min}\le q_{vtx}\le\overline{q}_{neighbor}^{\max}, \quad (6)$$

여기서 q_{vtx} 는 꼭지점에서 물성치이며, $\left(\overline{q}_{neighbor}^{\min/\max}\right)$는 꼭지점을 공유하는 격자 평균 물성치의 최대/최소이다. MLP 조건은 근본적으로 격자

위상 정보와 관계없이 적용할 수 있다. 효율성과 정확성을 고려하여 q_{vtx} 를 근사화하는 방법에 따라 정렬 및 비정렬 격자계에 적용할 수 있다.

이러한 MLP 조건은 이론적으로 Maximum Principle 을 만족하여 다차원 공간에서 단조성이 보장됨을 보일 수 있다. 기존 기법과 비교하여, MLP 조건은 인접하는 주변 격자 정보를 충분히 이용한다. 그 결과 MLP 기법은 다차원 물리 유동 분포를 포착할 수 있으며, 기존 기법에 비해 정확성을 향상시켰다. 또한 MLP 조건은 LED (Local Extrema Diminishing) 조건을 다차원 공간에서 만족하며, L^{∞} 안정성을 보장한다.

3.2 Hierarchical MLP 기법

효율적으로 고차 정확도의 계산을 위해서는 troubled-cell 에 대해서 선택적으로 제한자가 적용되어야 한다. 이런 점에서 정교한 공간 제한 기법과 더불어서 정확한 troubled-cell 구분자는 불연속 갤러킨 기법을 이용한 고정밀 계산을 하는데 있어서 매우 중요하다.

기존에 유한체적법에서는 MLP 조건을 이용하여 Maximum Principle 을 위배하는 셀을 찾고 이 셀에 대해 공간제한 기법을 적용하였다. 이때 셀 내부를 선형 분포로 가정하였기 때문에 셀 격자점에서 분포를 제한함으로써 셀 경계에서의 값 역시 제한할 수 있었다. 그러나 셀 내부를 선형 이상의 고차 정확도로 내삽하는 경우 이러한 기준을 바로 적용하는데 한계가 있다. 고차 다항식 근사화된 셀에 대해 MLP 조건만으로는 Troubled-cell 을 모두 포착하는데 한계가 있다. 이를 보완하기 위해서 아래와 같이 강화된 조건을 제안하였다.[6]

$$\begin{aligned} &\overline{q}_{v_i}^{\min} \le q_{v_i}^{h,\min} \le q_{v_i}^{h}, \\ &q_{v_i}^{h} \le q_{v_i}^{h,\max} \le \overline{q}_{v_i}^{\max}, \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $q_{v_i}^{h}$ 는 격자 v_i 에서 내삽된 해이고, $\left(\overline{q}_{v_i}^{\min}, \overline{q}_{v_i}^{\max}\right)$는 격자 v_i 를 공유하는 물성치의 최대, 최소값이다. 격자 주위 분포가 이 조건을 위배하는 경우 그 격자를 공유하는 모두를 제한 기법이 필요한 격자를 troubled-cell 로 판별한다.

이 조건 적용시 clipping 현상으로 극점 주위에서 정확성이 저해할 우려가 있다. 이를 해결하기 위해서 국부적인 극점을 포착하는 요소가 추가적으로 필요하다. 이를 위해서 본 연구에서는 격자 내 분포를 다음과 같이 선형 구간과 고차 정확도 구간으로 분리하였다.

$$q_{v_i,k}^{h,Pn} = \overline{q}_k + \left(L_{v_i,k} - \overline{q}_k\right) + \left(q_{v_i,k}^{h,Pn} - L_{v_i,k}\right), \tag{8}$$

여기서 $q_{v_i,k}^{h,Pn}$ 은 격자 T_k 에서 꼭지점 v_i 로 Pn 내삽 기법을 적용한 결과이다. $L_{v_i,k}$ 은 Pn 내삽 함수를 선형 함수 공간으로 투영한 결과이다. 직교 기저 함수를 사용할 경우 $L_{v_i,k} = q_{v_i,k}^{h,P1}$ 이다. 매끄럽게 유동이 변하는 구간에서 극점에서는 다음과 같은 추측이 가능하다.

$$\begin{aligned} &\text{Local Maximum} \\ &L_{v_i,k} - \overline{q}_k > 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} - L_{v_i,k} < 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} > \overline{q}_{v_i}^{\min}. \\ &\text{Local Minimum} \\ &L_{v_i,k} - \overline{q}_k < 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} - L_{v_i,k} > 0, q_{v_i,k}^{h,Pn} < \overline{q}_{v_i}^{\max}. \end{aligned} \tag{9}$$

식 (7)과 식 (9)을 이용하여 새로운 MLP-based Troubled-cell Marker 를 제안할 수 있다. 이를 최고차 내삽 기법에서 계층적으로 적용하여, 선형 구간까지 공간 제한 기법이 필요한 경우 MLP-u 기울기 제한자를 적용한다.

4. 수치 실험 결과

다양한 수치 실험을 통해서 CPR framework 에서 MLP 기법의 특징을 확인하였다. 2 차원 삼각형 요소에 대해서 4 차 정확도 내삽 기법까지 적용하였다. 수치 flux 기법으로는 RoeM 기법 과 AUSMPW+ 기법 을 적용하였다. 효율적인 계산을 위해서 METIS library 를 이용한 격자 분할 및 MPI 병렬 기법을 적용하였다.

4.1. Shock-Entropy Wave 상호 작용 문제

이 문제는 고차 정확도 수치 기법의 해상도를 파악하기 위해 널리 알려진 Benchmark test 이다. 계산 영역은 [-5,5]x[-0.075,0.075]로 x 방향으로 400 개의 격자점으로 구성되어 있다. 초기 조건은 다음과 같다.

$$(\rho_L, u_L, v_L, p_L) = (3.857143, 2.629369, 0, 10.3333)$$
$$(\rho_R, u_R, v_R, p_R) = (1 + 0.2\sin(5x), 0, 0, 1.0)$$

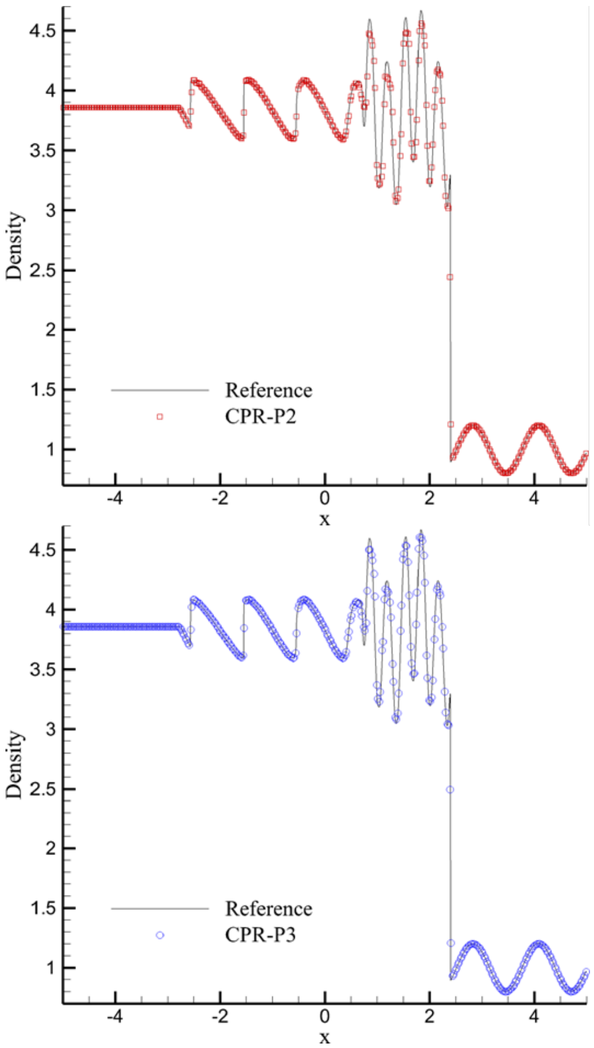

Fig. 1 Density distributions along center line

Figure 1 은 중심선에서 *t=1.8* 일때 밀도 분포를 비교한 결과이다. MLP 기법에 의해 충격파 부근에서 수치 진동이 발생하지 않으면서도 충격파-엔트로피 상호 작용에 따른 유동 변화를 정밀하게 포착하고 있음을 확인할 수 있었다.

5. 결 론

본 연구를 통해서 MLP 기법을 CPR framework 으로 확장, 구현하여 비정렬 격자계에 대해 고차 공간 정확도를 갖는 강건하고 효율적인 수치 알고리즘을 개발하였다. 특히 4 차 정확도를 갖는 P3 내삽 기법 대해서도 성공적으로 확장하였다. 개발한 기법은 복잡한 다차원 물리 유동 특징을 불필요한 수치 진동을 야기하지 않으면서 정확하게 포착할 수 있다. 다양한 수치 실험을 통해서 개발된 기법이 갖는 다차원 단조성 만족, 향상된 정확성 및 효율성 등의 여러 장점을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 우주기초원천기술개발 사업(NSL, National Space Lab, 과제번호 2012-0009099), 교육과학기술부 첨단사이언스 교육허브개발사업(EDISON, 과제 번호 2012-0006661)으로부터 지원받아 수행되었습니다.

참고문헌

(1) H. T. Huynh, 2007, "A Flux Reconstruction Apporach to Higher-order Schemes including Discontinuous Galerkin Methods," *Proc. of 18th AIAA CFD Conference*, AIAA 2007-4079.

(2) Z. J. Wang and H. Gao, 2009 "A Unifying Lifting Collocation Penalty Formulation Including Discontinuous Galerkin, Spectral Volume/Difference Methods for Conservation Laws on Mixed Grids," *Journal of Computational Physics*, Vol. 228, pp. 8161~8186.

(3) Kim, K. H. and Kim, C., 2005, "Accurate, Efficient and Monotonic Numerical Methods for Multi-dimensional Compressible Flow Part II: Multi-dimensional Limiting Process," *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 570~615.

(4) Park, J. S., Yoon, S. H. and Kim, C., 2010, "Multi-dimensional Limiting Process for Hyperbolic Conservation Laws on Unstructured Grids," *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, pp. 788~812.

(5) Park, J. S. and Kim, C., 2012, "Multi-dimensional Limiting Process for Finite Volume Methods on Unstructured Grids," *Computers & Fluids*, Vol. 65, pp. 8~24.

(6) Park, J. S. and Kim, C., submitted, "Higher-order Multi-dimensional Limiting Strategy for Discontinuous Galerkin Methods in Compressible Inviscid and Viscous Flows," *Computers & Fluids*.

(7) H. Gao and Z. J. Wang, 2013, "A Conservative Correction Procedure via Reconstruction Formulation with the Chain-rule Divergence Evalution," *Journal of Computational Physics*, Vol. 232, pp. 7~13.